

周波数掃引形計測器の周波数領域における解析

中津山 幹男・水 沼 充・杉 本 皆 子

西 塚 典 生・長 橋 宏

工学部・電子工学科

(昭和58年 8 月31日受理)

Analysis of Measuring Apparatuses Using a Sweep Generator in Frequency Domain

Mikio NAKATSUYAMA, Mitsuru MIZUNUMA, Minako SUGIMOTO,

Norio NISHIZUKA and Hiroshi NAGAHASHI

*Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering***Abstract**

One of measuring apparatuses using a sweep generator is a swept frequency measurement system (SF) and the other is a spectrum analyzer (SA). Though the appearance of SF differs substantially from that of SA at a glance, we clarified that the output signal of SF is quite same as that of SA if the device under test is a filter used in SF. The analysis by FFT is almost equivalent to the numerical analysis of differential equations in the meaning of time complexity. If only the frequency characteristics of a device under test can be measured, the method using FFT is superior to the numerical analysis of differential equations.

1. はしがき

可変周波数計測器の代表例は周波数が連続的に変る掃引形発振器を利用した周波数特性、位相特性、伝送特性を測定するF形と、同様に掃引発振器とミクサーにより周波数変換をして周波数成分を測定するS形とがある。両者は一見かなり異なるが、原理的には類似点が多い¹⁾²⁾。特に掃引方式を等しくし、かつF形の測定対象とS形で用いられるフィルターが同一であれば、解析手順は全く一致する。ただしF形では掃引周波数は指数関数的に、S形では直線的に変ることが多い。一般に掃引周波数は連続的に変るので、単一の周波数とはみなせず、当然、測定に誤差が生じてくる。

F形やS形の誤差の解析には精度の良い微分方程式の解法が用いられて来たが、演算時間が大きくなるのが難点である。一般に時間領域での解析は周波数領域での解析に対応するが³⁾、掃引周波数は単一の周波数ではなく連続スペクトラムになり、単純な周波数領域のみでの解析は困難である。

ここでは、FFTにより掃引波形から周波数成分を計算し、これに伝達関数を乗じると求める周波数成分が得られる。この周波数成分から測定誤差の粗い推定が可能であるが精密な計算には不向きである。求められた周波数成分にFFTの逆変換を施すと出力波形が求められる。測定対象が既知であると出力波形の誤差が簡単に計算できる。出力波形の誤差を正確に計算するために必要なサ

ンプリング区間および誤差の計算にFFTを用いた方が有利な場合についても報告する。

2. 掃引形計測器

二種類の掃引形計測器は音響の測定、変調波の測定、伝送線路の測定に広く使われている。F形の代表的構成例をFig. 1(a)に示す。掃引信号を測定対象に加え、その出力をディスプレイに表示して、測定対象の周波数特性が直読されるようになっている。Fig. 1(b)はS形の構成例であり、未知の信号と掃引信号の差の信号がミキサーにより求められ、不必要な和の信号などをフィルターで除去してディスプレイに表示すると、未知信号の周波数成分が直読できる。

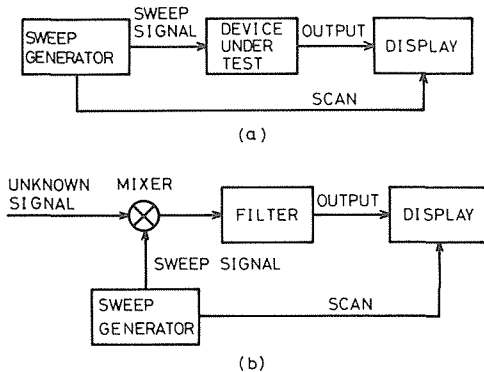


Fig. 1 Measuring apparatuses using a sweep generator. (a) A swept frequency measurement system. (b) A spectrum analyzer.

掃引発振器の角周波数 ω が

$$\omega = A e^{Bt} \quad (1)$$

のように指数関数的に変るとき掃引信号 e_o は

$$e_o = a \cos\left(\frac{A}{B} e^{Bt} + \varphi\right) \quad (2)$$

となる。 φ は定数である。 ω が直線的に変化するとき

$$\omega = \omega_o + \Delta\omega t \quad (3)$$

となり、掃引信号 e_o は

$$e_o = a \cos(\omega_o t + \Delta\omega t^2/2 + \varphi) \quad (4)$$

となる。式(2)、(4)で表わされる掃引信号がFig. 1(a)の測定対象への入力となる。Fig. 1(b)のS形で未知信号の角周波数を ω_u 、掃引角周波数を ω_s とおくと、フィルターへの入力信号角周波数 ω_i は

$$\omega_i = m \omega_s \pm n \omega_u \quad (5)$$

$$m, n = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$$

となる。ここでフィルターにより

$$\omega_i = \omega_s - \omega_u \quad (6)$$

を選択させることにする。 ω_s が直線的に変化するときはフィルターへの入力信号は式(4)に等しくなる。 ω_s が指数関数的に変るときは $\omega_u = 0$ を除いて式(2)と異なる表現になる。しかし、S形では一般に ω_s は直線的に変化するので、簡単のためS形では直線変化のみを考えることにする。

もしFig. 1(a)の測定対象とFig. 1(b)のフィルターが同一で、かつ2次のフィルターであるなら、次のような微分方程式が成立する(付録1参照)。

$$\frac{d^2 I}{dy^2} + \frac{1}{Q} \frac{dI}{dy} + I = \begin{cases} -\epsilon^{Gy} \sin(\epsilon^{Gy}/G) & (7a) \\ -(1 + By) \sin(y + By^2/2) & (7b) \end{cases}$$

ただし式(7a)は掃引周波数が指数関数的に変化し、式(7b)は直線的に変る場合である。 Q は共振回路の良さを、 G 、 B は掃引速度を表わす。 I は出力を示し、 y は時間に相当する。もちろん式(7a)はS形では成立しない。

RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM法⁵⁾(以下RKN法と略記する)は2次の微分方程式を解くのに便利な数値解法であり、きざみが h のとき $O(h^4)$ の誤差で解が求められる。式(7)をRKN法で解き、FFTによる解との比較を行なう。微分方程式による数値解法の欠点は、あらかじめ適正な初期値を与えることができないことであり、そのために不要な過渡応答が十分に小さくなるまで数値計算を続ける必要がある。

式(7)の右辺を0とおいて過渡応答を求めると

Table 1 Values of $\exp(-y/2Q)$

y	$\exp(-y/2Q)$	y	$\exp(-y/2Q)$
2Q	0.36788	12Q	0.00248
4Q	0.13534	14Q	0.00091
6Q	0.04979	16Q	0.00034
8Q	0.01832	18Q	0.00012
10Q	0.00674	20Q	0.00005

$$e_y = a \exp\left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)y + b \exp\left(-\frac{1}{2Q} - \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)y \quad (8)$$

が得られる。減衰量を求めると Table 1 のようになる。実際に $B=0$ とおいて式 (7b) の数値解を求めると $Q=32$ で $y=470$ のときの $\exp(-y/2Q)$ は 0.00064 であり、数値解の誤差も 0.00063 で良く一致している。

3. FFTによる解析

掃引形計測器の解析に微分方程式の数値解法を用いる時は、不要な過渡応答により計算時間が大きくなる場合が多い。式 (7) のように特殊な入力信号では、過渡応答を最小にする初期値を、あらかじめ与えることは困難である。周波数領域の計算では、割合簡単に過渡応答を小さくでき、また掃引速度が小さい場合は周波数の変化の割合が小さくなり計算時間が少くてすむと予想される。

FFTを用いる場合のアルゴリズムは Fig. 2 の通りである。サンプリングする区間はできるだけ大きくした方が精度が良くなるが、そのためには記憶容量、計算時間も増大するので、必要な精度が得られる最小区間であることが望ましい。

FFTではサンプリングされた波形が無限に繰り返すものとして扱うので、サンプリング区間の始点および終点の波形の大きさ、すべての微係数が一致すれば過渡応答は起きないはずである。しかし、すべての値を一致させることは不可能であるので、必然的に不要な過渡応答が起ることに

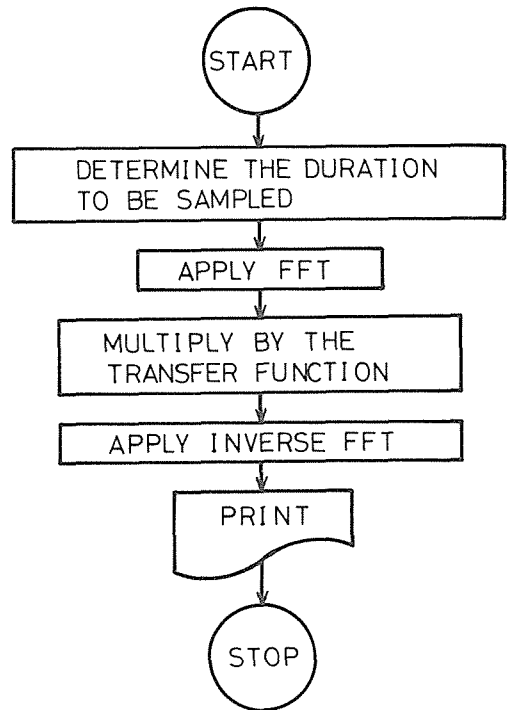


Fig. 2 Analysis by FFT.

なる。ここでは、サンプリングの始点と終点で波形が零になるように区間を定めることにする。

直線的掃引の場合は、考えている周波数を F_x とおくと、波形が零になる始点 T_1 と終点 T_2 は次式で計算される (付録 2 参照)。

$$L_x = \left[\frac{F_x^2 - 1}{2B\pi} \right] \quad (9)$$

$$Z_1 = L_x - N \quad (10)$$

$$Z_2 = L_x + N \quad (11)$$

$$T_1 = \{-1 + \sqrt{1 + Z_1 \pi B}\} / B \quad (12)$$

$$T_2 = \{-1 + \sqrt{1 + Z_2 \pi B}\} / B \quad (13)$$

ただし $[]$ はガウス記号を表わす。 $2N$ が一区間のサイクル数を表わす。

区間 T を

$$T = T_2 - T_1$$

とおき、新区間を

$$T^* = T \cdot A_K$$

Table 2 Amplitude error caused by fluctuation of sampling duration

$T^* = T \cdot A_K$	MAXIMUM AMPLITUDE
$A_K = 1$	0.99500
$A_K = 1 - 10^{-5}$	0.99499
$A_K = 1 - 10^{-4}$	0.99529
$A_K = 1 - 10^{-3}$	0.99817
$A_K = 1 - 10^{-2}$	1.00514

とし、 A_K を変えて見て出力の変化を計算したのがTable 2である。 $A_K = 1$ のときの出力の値を標準にすると A_K を小さくするにつれて誤差が増大していく。このことから、始点と終点で十分な精度で波形が零になる必要があることが明らかになった。

FFTで求めた周波数成分に2次フィルターの伝達関数を乗じて、2次フィルターの出力の周波数成分を求める。2次フィルターの伝達関数は一般に複素数である。なお、伝達関数を乗ずるとき、FFTでは負の周波数も含まれていることに注意しなければならない。

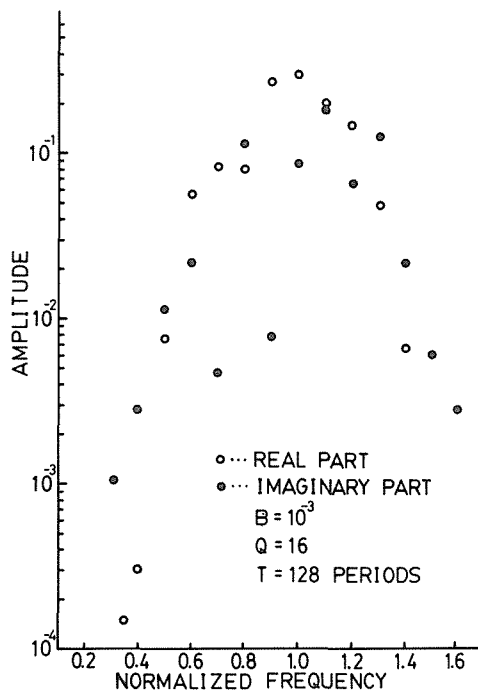
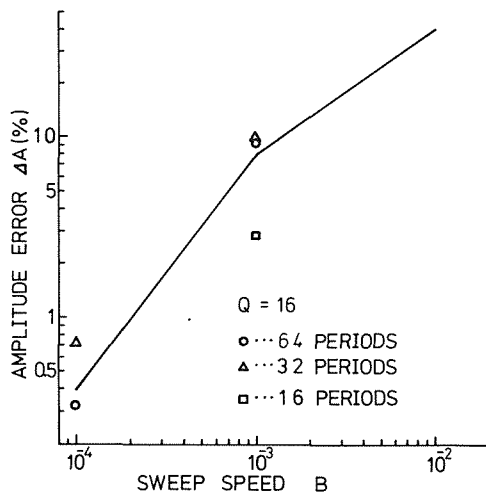


Fig. 3 Frequency components calculated by FFT.

サンプリング区間中の波形のサイクル数が128, サンプリング点が4096であるとしたときの、 $B = 10^{-3}$ で $Q = 16$ の2次フィルターの出力からFFTで周波数成分を求めたのがFig. 3である。周波数は2次フィルターの中心周波数で1になるように正規化されている。周波数成分は正規化周波数1の付近で最大になり、かつ1付近で大きく振動しているようすが見られる。 $Q = 16$ の2次フィルターの周波数特性からずれており、測定誤差の存在を示している。Fig. 3から周波数特性の誤差を求めることは容易であるが、波形の誤差との関係が明白でないので、Fig. 2のアルゴリズムに従って波形の誤差を求めることにする。

$Q = 16$ の2次フィルターの周波数成分にFFTの逆変換を施すと出力波形が得られる。直線の掃引のときの誤差をFig. 4に示す。実線は微分方程式の数値解から得られたものである。サンプリング点は $2^{12} = 4096$ で、サンプリング区間中の波形のサイクル数を16, 32, 64と変えてある。図からサイクル数64のとき微分方程式の数値解とよく一致する。サンプリング点を変えずに、サイクル数を128としても64とそう変らない結果が得られた。またサンプリング点を 2^{11} , 2^{10} , 2^9 とした場合、 2^9 以外は、ほぼ 2^{12} と似た値を示し、 2^9 のとき、やや

Fig. 4 Amplitude error for $Q = 16$.

劣る結果が得られた。掃引速度が大きい場合は誤差が大きくなるので現実には測定には使用されない。またFFTでの計算に於ても B が 10^{-2} 付近ではサ

ンプリング点を大きくする必要がある、また計算時間も膨大になるのでFFTの計算は行わなかった。Fig. 4は振幅誤差で、一般に振幅はフィルターの伝達関数の正確な値より小さくなる。ただし極端にBを小さくすると振幅が正確な値より大きくなる場合もある。Fig. 5は振幅が最大値をとる周波数の誤差で、周波数を小さい方から大きい方へと掃引するとき、振幅が最大値をとる周波数は大きい方へずれる。

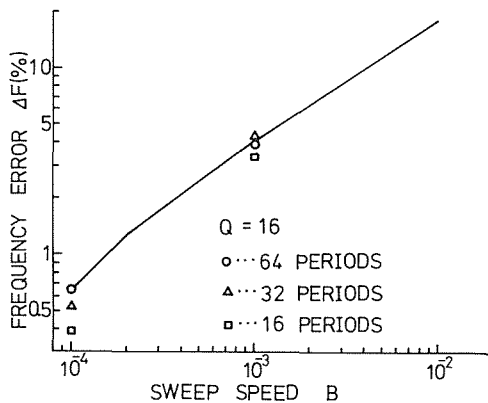


Fig. 5 Frequency error for $Q = 16$.

Fig. 6 ~ Fig.11は $Q = 32, 64, 128$ の場合の振幅誤差、周波数誤差を示す。当然、 Q が大きくなるにつれて誤差は増大する。

測定対象に掃引発振器の信号を入力として印加するとき、掃引速度をできるだけ遅くすると、出力波形は限りなく正確な値に近ずいてくる。しかし、未知周波数を測定する場合は、掃引速度を小

さくすると、正確な振幅と正しい周波数を求めることが可能であるが、単一周波数でも出力波形はフィルターの周波数特性に似た波形になり、単一周波数を示さないという奇妙な現象が起るが、現在の測定方法では止むを得ない現象である。

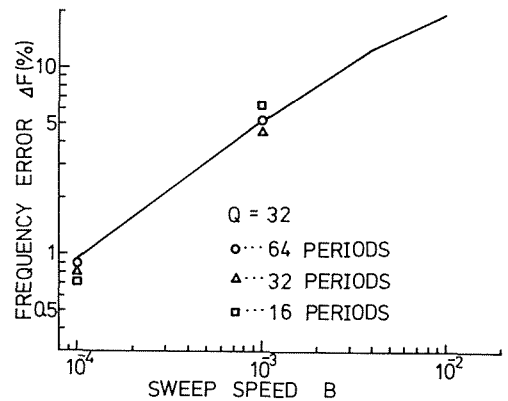


Fig. 7 Frequency error for $Q = 32$.

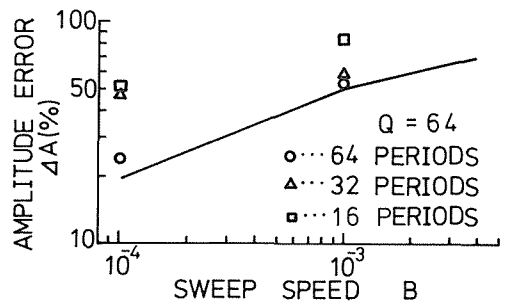


Fig. 8 Amplitude error for $Q = 64$.

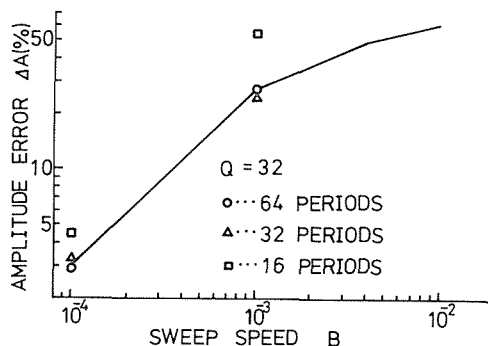


Fig. 6 Amplitude error for $Q = 32$.

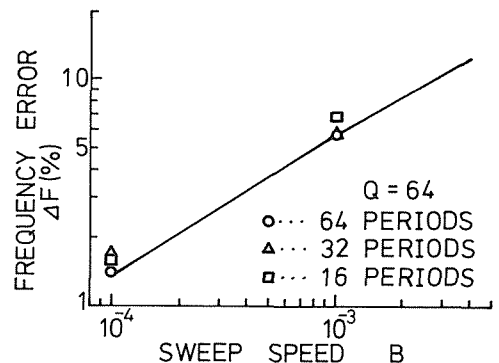
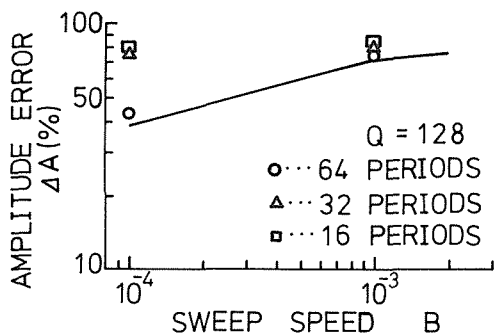
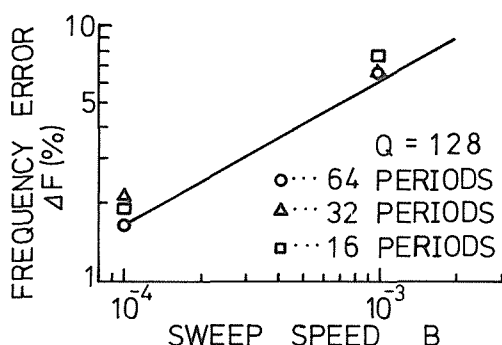


Fig. 9 Frequency error for $Q = 64$.

Fig.10 Amplitude error for $Q = 128$.Fig.11 Frequency error for $Q = 128$.

4. FFTと微分方程式の数値解法との比較

FFTを用いた解析でも、十分に実用に供することのできる計算精度が得られることが明らかになった。微分方程式の数値解法はきざみ h を小さくすることにより十分な精度が得られるが、計算時間が大きくなるという欠点がある。電子計算機による計算では一般に加減算より乗除算の計算時間が1桁ほど大きいので、積の数について比較する。FFTにおいても、微分方程式の数値解法においても除算の回数は少ないので除算は無視する。

FFTの演算の積の数は⁴⁾

$$2n \log_2 n$$

で与えられる。 n は波形のサンプリング点の数である。FFTによる解析ではFFTによる変換と逆変換を行なうので上記の値の2倍になる。 n を変えて計算するとTable 3のようになる。

Table 3 Number of products

n	$4n \log_2 n$
2^{10}	4.096×10^4
2^{11}	9.010×10^4
2^{12}	1.976×10^5

微分方程式の解法にRKN法を用いるとき、きざみごとに3～9回の積が必要となる。RKN法の誤差は一般にきざみを h とすると $O(h^4)$ で与えられるが、もちろん微分方程式の性質によって誤差の値は変ってくる。2次フィルターの Q が大きいほど、また掃引速度が大きいほど計算誤差が大きくなる傾向があり、したがって Q や掃引速度の値によってきざみ h の大きさを適正な値にしなければならない。振幅誤差が大きいときは、相対的にきざみ h を大きくすることができる。振幅誤差が小さいところでは、それだけ計算誤差が小さいことが要求されるのできざみ h を小さく選ばなければならない。微分方程式を解く区間が一定のときには、計算回数はきざみ h の逆数に比例してくる。

振幅誤差を一定にして、 Q を変えたときの積の数はTable 4およびTable 5のようになる。積の

Table 4 Number of products for amplitude error = 1 %

Q	NUMBER OF PRODUCTS
32	$1.4 \times 10^4 \sim 4.21 \times 10^4$
64	$2.81 \times 10^4 \sim 6.43 \times 10^4$
128	$5.62 \times 10^4 \sim 1.68 \times 10^5$

Table 5 Number of products for amplitude error = 0.1 %

Q	NUMBER OF PRODUCTS
32	$2.13 \times 10^4 \sim 6.41 \times 10^4$
64	$4.27 \times 10^4 \sim 1.28 \times 10^5$
128	$8.55 \times 10^4 \sim 2.56 \times 10^5$

数に幅があるのは掃引速度によってきざみ h が変わるからである。

2次フィルターの誤差を計算する場合は、FF

Tによる解法と微分方程式の数値解法は、ほぼ同程度の演算時間を必要とすることが明らかである。しかし、フィルターの次数が高くなると、RUNGE-KUTTA法の連立方程式を解かなければならないので、FFTの方が有利であると考えられる。

5. むすび

直線的掃引ではF形とS形の掃引形計測器が全く同じ手法で解析できることを示し、またFFTと微分方程式の数値解法がほぼ同じ演算時間を必要とすることを示した。FFTにより得られた周波数成分から誤差を推定できれば、FFTの方が有利であるが、現在のところ周波数成分の誤差と出力波形の誤差の間の簡単な関係式は見いだされていない。

ただし測定対象が測定のみにより周波数特性が求められる場合は、これから微分方程式を求めることが困難な場合が多い。FFTでは周波数特性が与えられれば容易に出力が計算されるので具体的な測定対象の計算に向いている。

文 献

- 1) 中津山, 計測自動制御学会論文集, **6**, 97 (1970).
- 2) 中津山, 計測自動制御学会東北支部研究会, **63**, 4 (1976).
- 3) 城戸, 第3回応用情報学研究センター・シンポジウム, (1977).
- 4) W. Cochrdn et al., IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, **AU-15**, 45 (1967).
- 5) E. クライツィグ, 技術者のための高等数学I, 培風館, 147頁 (1963).

付録1 式(7)の誘導

式(7a)の誘導

LCRの直列回路に電圧 $\cos(A\epsilon^{Bt}/B)$ を印加すると、電流 i について、次式が成立する。

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = \cos\left(\frac{A}{B} \epsilon^{Bt}\right) \quad (A1)$$

上式を微分すると

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = -A \epsilon^{Bt} \sin\left(\frac{A}{B} \epsilon^{Bt}\right) \quad (A2)$$

$t = y/\omega_o$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d^2i}{dy^2} + \frac{R}{\omega_o L} \frac{di}{dy} + \frac{1}{\omega_o^2 LC} i \\ = -\frac{A}{\omega_o^2 L} \epsilon^{B(y/\omega_o)} \sin\left(\frac{A}{B} \epsilon^{B(y/\omega_o)}\right) \end{aligned} \quad (A3)$$

ここで $y_o = \omega_o \log(\omega_o/A)/B$, $x = y - y_o$, $Q = \omega_o L/R$, $\omega_o^2 LC = 1$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d^2i}{dx^2} + \frac{1}{Q} \frac{di}{dx} + i = -\frac{1}{\omega_o L} \epsilon^{(Bx/\omega_o)} \\ \sin\left(\frac{\omega_o}{B} \epsilon^{(Bx/\omega_o)}\right) \end{aligned} \quad (A4)$$

を得る。 ω_o は回路の共振角周波数であり、 Q は共振回路の良さを表わす値である。 $G = B/\omega_o$, $i = I/(\omega_o L)$ とおくと

$$\frac{d^2I}{dx^2} + \frac{1}{Q} \frac{dI}{dx} + I = -\epsilon^{Gx} \sin(\epsilon^{Gx}/G) \quad (A5)$$

が得られる。

式(7b)の誘導

LCRの直列回路に電圧 $\cos(\omega_o t + \Delta \omega t^2/2)$ を印加すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = -(\omega_o + \Delta \omega t) \\ \sin\left(\omega_o t + \frac{\Delta \omega}{2} t^2\right) \end{aligned} \quad (A6)$$

$t = y/\omega_o$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d^2i}{dy^2} + \frac{R}{\omega_o L} \frac{di}{dy} + \frac{1}{\omega_o^2 LC} i \\ = -\frac{1}{\omega_o^2 L} \left(\omega_o + \frac{\Delta \omega}{\omega_o} y\right) \\ \sin\left(y + \frac{1}{2} \frac{\Delta \omega}{\omega_o^2} y^2\right) \end{aligned} \quad (A7)$$

$\omega_o^2 LC = 1$, $Q = \omega_o L/R$, $\Delta \omega / \omega_o^2 = B$,
 $i = I/(\omega_o L)$ とおくと

$$\frac{d^2 I}{dy^2} + \frac{1}{Q} \frac{dI}{dy} + I = -(1 + By) \sin\left(y + \frac{1}{2}By^2\right) \quad (A8)$$

区間の始め T_1 と終り T_2 を

$$T_1 = \{-1 + \sqrt{1 + Z_1 \pi B}\} / B \quad (A18)$$

$$T_2 = \{-1 + \sqrt{1 + Z_2 \pi B}\} / B \quad (A19)$$

とおけば良い。

が得られる。

付録2 式(9)～式(13)の誘導

中心の周波数を正規化された角周波数で F_x とおくと

$$F_x = 1 + B y_x \quad (A9)$$

から

$$y_x = (F_x - 1) / B \quad (A10)$$

が得られる。位相角 θ は

$$\theta = y + By^2/2 \quad (A11)$$

であるので、式(A10)を代入すると

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{B} (F_x - 1) + \frac{1}{2} B \left(\frac{F_x - 1}{B} \right)^2 \\ &= (F_x^2 - 1) / B \end{aligned} \quad (A12)$$

が得られる。式(A8)の右辺が零になるのは θ/π の値が整数になるときであるので、 F_x の近くで零になる θ の値を $2\pi L_x$ とおくと

$$L_x = \left\lfloor \frac{F_x - 1}{2B\pi} \right\rfloor \quad (A13)$$

が得られる。つぎに

$$Z_1 = L_x - N \quad (A14)$$

$$Z_2 = L_x + N \quad (A15)$$

なる Z_1 , Z_2 を定義する。式(A8)の右辺が零になる y の値は次式より求められる。

$$2n\pi = y + By^2/2 \quad (A16)$$

これから

$$y = \{-1 + \sqrt{1 + n\pi B}\} / B \quad (A17)$$

が求まる。いま F_x をほぼ中心に置き、その両側に N サイクルずつの波形があるようにするためには